MINES - PONTS - TELECOMM 1980

- 60 -

OPTION TA - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option TA, comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

HYPOTHESES ET NOTATIONS

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

2. Soit $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées $A = (a_{ij})$ d'ordre n à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_n$ est notée I.

3. Considérons dans l'espace $\mathcal{M}_n$ une suite de matrices $A_p = (a_{ij}^{(p)})$, $p = 0,1,2,\ldots$ et une matrice $A = (a_{ij})$. On dit que la suite (A_p) converge vers A si pour tout couple d'indices (i,j) la suite $(a_{ij}^{(p)})$ converge vers a_{ij}.

4. Etant donné un polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_qX^q$ à coefficients réels et une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, on pose $P(A) = a_0I + a_1A + \ldots + a_qA^q$. Si une matrice B s'écrit $B = P(A)$ pour au moins un polynôme P, on dit que $B = P(A)$ est un polynôme en A.

5. La matrice transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. On dit qu'une matrice M est symétrique si $M = {}^tM$.

6. On désigne par $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On utilise la même lettre x pour désigner un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et la matrice-colonne formée par ses coordonnées dans la base canonique. L'espace $\mathbb{R}^n$ est supposé muni de sa structure euclidienne canonique : le produit scalaire de deux vecteurs x et y est ${}^txy$ (on pourra utiliser pour le désigner n'importe quelle notation usuelle) ;

   on note $\|x\| = ({}^txx)^{1/2}$ la norme euclidienne associée.

7. Soit $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ des matrices carrées symétriques.
   Soit $A \in \mathcal{S}_n$; nous poserons :

   Φ_A est la forme bilinéaire symétrique associée à A : $\Phi_A(x,y) = {}^txAy$

   q_A est la forme quadratique définie par : $q_A(x) = \Phi_A(x,x)$.

   1°) a) Soit $A \in \mathcal{S}_n$; montrer que pour $x,y \in \mathbb{R}^n$, il vient :

   $$\Phi_A(x,y) = \frac{1}{4}\left(q_A(x+y) - q_A(x-y)\right)$$

   b) Montrer que la relation :

   $$A \leqslant B \text{ si et seulement si } q_A(x) \leqslant q_B(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

   est une relation d'ordre définie dans $\mathcal{S}_n$.

   2°) Soit $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{S}_n$ telles que $A \geqslant 0$.

   a) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{S}_n^+$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des réels positifs ou nuls.

.../...

Montrer : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i \in \mathcal{S}_n^+$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$; montrer que pour tout $p = 0,1,2,\ldots$

$$A^p \in \mathcal{S}_n^+ .$$

Indication : Exprimer ${}^t x\, A^p\, x$ de deux manières différentes suivant la parité de p.

b) Application : Soit M_t la matrice : $M_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$;

Montrer : $M_t \in \mathcal{S}_2^+$; calculer $M_{t_1} . M_{t_2}$; en déduire que l'ensemble E des matrices M_t $t \in \mathbb{R}$ est un groupe abélien.

Montrer que l'application $t \rightsquigarrow M_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}_2$ est monotone croissante.

3°) Soit A_p $p = 0,1,2,\ldots$ une suite de matrices appartenant à $\mathcal{S}_n$ et soit $B \in \mathcal{S}_n$ telles que :

$$\forall p \qquad A_p \leqslant A_{p+1} \quad \text{et} \quad A_p \leqslant B$$

Montrer que la suite des matrices A_p est convergente.

Indication : Considérer pour i et j donnés les suites $q_{A_p}(e_i + e_j)$ et $q_{A_p}(e_i - e_j)$.

4°) Soit $A \in \mathcal{S}_n$;

a) montrer qu'à la matrice A, il est possible de faire correspondre un réel positif ou nul défini par :

$$N(A) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q_A(x)| .$$

Démontrer que N(A) a les propriétés :

- $N(A) = 0 \iff A = 0$
- $N(cA) = |c|\, N(A) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$
- $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{S}_n$.

Démontrer l'inégalité : $|q_A(x)| \leqslant N(A). \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

En déduire l'équivalence :

$$N(A) \leqslant c \iff -cI \leqslant A \leqslant cI \qquad c \geqslant 0 .$$

Calculer $N(M_t)$; M_t est la matrice définie à la question n° 2.

b) Montrer l'inégalité : $|\Phi_A(x,y)| \leqslant \frac{1}{2} N(A). (\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

En déduire les propriétés :

α. $N(A) = \sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} |\Phi_A(x,y)|$

β. $\forall \; x,y \in \mathbb{R}^n \quad |\Phi_A(x,y)| \leqslant N(A) . \|x\| . \|y\|$

5°) Soit $A \in \mathcal{S}_n$.

a) Montrer la relation : $\forall \; y \in \mathbb{R}^n \qquad \|Ay\| \leqslant N(A) . \|y\|$

Indication : Considérer $\Phi_A(x,y)$ et choisir un vecteur x particulier.

.../...

b) En déduire ; il existe un réel positif $N'(A)$ tel que :

$$N'(A) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

En déduire : $\forall x \quad \|Ax\| \leq N'(A) \|x\|$.

Montrer l'égalité : $N(A) = N'(A)$.

c) Démontrer les relations :

$\forall A,B \in \mathcal{S}_n \quad N(AB) \leq N(A)\ N(B) \quad ; \quad N(A^2) = N(A)^2$.

Vérifier ces relations dans le cas des matrices M_{t_1} et M_{t_2} .

d) Application : Soit la suite des matrices A_p :

$A_p = I + aM_t + a^2M_t^2 + \ldots + a^pM_t^p \quad p = 1,2\ldots$

a est un réel positif ou nul.

Vérifier que la suite A_p est une suite monotone croissante.

Montrer qu'il existe un réel r ($r > 0$) tel que pour $a \leq r$ la suite A_p vérifie la propriété :

$$\exists K > 0 \quad : \quad \forall p \quad N(A_p) \leq K.$$

En déduire que la suite A_p est convergente ; soit A sa limite ; calculer A et montrer que A est une combinaison linéaire des matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que A vérifie la relation : $(I - aM_t)\ A = I$.

6°) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$ tel que $A \leq I$; soit $B = I - A$; soit $C_p \quad p = 0,1,2,\ldots$ la suite de matrices définie par les relations :

$$C_0 = 0$$
$$C_{p+1} = \frac{1}{2}(B + C_p^2) \quad p = 0,1,2,\ldots$$

a) Montrer que C_p est, pour tout p, un polynôme en B à coefficients positifs ou nuls. En déduire :

$$C_p \in \mathcal{S}_n^+ \qquad C_p\ C_{p+1} = C_{p+1}\ C_p$$

b) Montrer que, pour tout p, $C_{p+1} - C_p$ appartient à $\mathcal{S}_n^+$; en déduire que la suite C_p est une suite monotone croissante.

c) Montrer l'inégalité :

$$N(C_p) \leq 1.$$

En déduire que la suite C_p est convergente ; soit C sa limite ; montrer :

$$C \leq I \qquad (I - C)^2 = A$$

7°) Soit plus généralement $A \in \mathcal{S}_n^+$; montrer qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $D^2 = A$. Vérifier le résultat trouvé sur la matrice M_t.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail